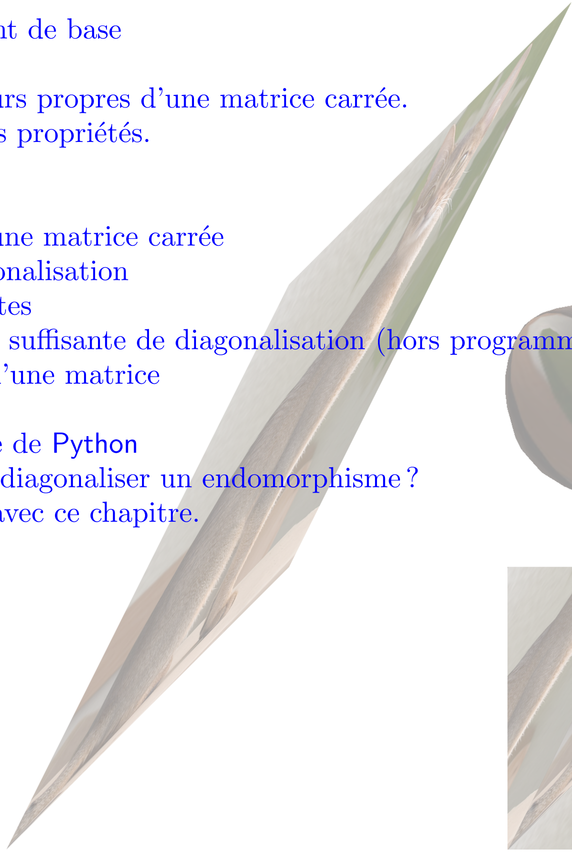
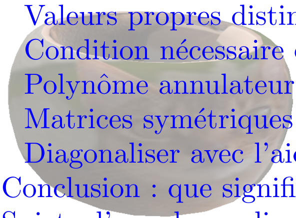
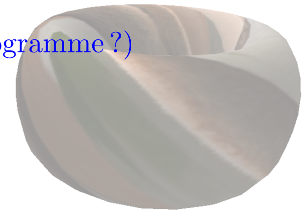
CHAPITRE VII

RÉDUCTION DES MATRICES

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

Dans tout ce texte, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E. On cherche à travailler le plus efficacement possible avec f. Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de E, on peut lui associer la matrice $A = \mathrm{Mat}(f;\mathcal{B})$ de f dans la base canonique, et utiliser le calcul matriciel. Mais la matrice A n'est pas toujours simple (notamment, le calcul de A^n peut être délicat). Notre marge de manœuvre consiste à jouer sur le choix de la base et chercher une autre base $\mathcal{B}'$, plus adaptée à f en ce sens que la matrice $A' = \mathrm{Mat}(f;\mathcal{B}')$ de f dans cette base sera plus simple. C'est l'objectif de la **réduction** de A.

Dans la première partie, nous allons examiner les aspect techniques d'un changement de base : comment la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique se transforme au cours d'un changement de base. Dans les paragraphes suivants, nous chercherons la "meilleure base possible", celle qui donne à la matrice de f sa forme la plus élégante.

Exemple 0.0.1. Regardons par exemple l'application linéaire suivante sur $\mathbb{R}^2$:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x+y) \end{array}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On calcule alors facilement la matrice de f dans cette base. On a

$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} [1].$$

Prenons maintenant une autre base de $\mathbb{R}^2$, celle qui est constituée des vecteurs

$$e_1' = \left(1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \text{et } e_2' = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right).$$

On note alors $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ et on vérifie facilement que c'est bien une autre base de $\mathbb{R}^2$. On veut maintenant calculer la matrice de f dans cette autre base $\mathcal{B}'$. Or on a

$$f(e_1') = \left(2 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1 + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} e_1'.$$

De même, on a

$$f(e_2') = \frac{3+\sqrt{5}}{2} e_2'.$$

De ce calcul, on tire l'expression de la matrice dans la base $\mathcal{B}'$. En effet,

$$\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice diagonale !

Il semble difficile de "penser" à introduire ces deux vecteurs e_1' et e_2' pour construire une base qui rende la matrice diagonale, peu de gens peuvent prétendre avoir une telle intuition.

Le but de ce chapitre est donc de présenter les méthodes pour parvenir de manière systématique à trouver une telle base. On dira qu'on a diagonalisé la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et que $\mathcal{B}'$ est une base de diagonalisation. Nous nous apercevrons aussi que les coefficients sur la diagonale sont déterminés de manière unique par $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B})$: ce sont ce ses valeurs propres.

1. Changement de base

1.1. **Matrice de passage.**

1. La matrice du chat d'Arnold

Définition : Matrice de passage

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases de l'espace vectoriel E. On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire comme combinaisons linéaires de $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_j & \cdots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{12} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

avec $e'_j = p_{1j}e_1 + p_{2j}e_2 + \ldots + p_{nj}e_n$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$.

Exemple 1.1.1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique donnée par :

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0) \\ e_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Notons $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de trois vecteurs définis par : $e'_1 = (1, 0, -1)$, $e'_2 = (0, 1, 0)$ et $e'_3 = (1, 0, 2)$.

Notons X_1, X_2, X_3 les coordonnées des vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Soit trois réels a, b, c tels que $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} aX_1 + bX_2 + cX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{ si et seulement si } \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ -a + 2c = 0 \end{cases} \\ & \text{ si et seulement si } \begin{cases} 3c = 0 \\ b = 0 \\ a = 2c \end{cases} \\ & \text{ si et seulement si } \quad a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Et puisqu'elle est constituée de *trois* vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui est de *dimension 3*, la famille $\mathcal{B}'$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ a alors pour expression :

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & X_2 & X_3 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.1.2. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $e_1 = (1;0;-1)$, $e_2 = (1;1;-1)$ et $e_3 = (0;0;-1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 1.1.3. Dans un espace vectoriel E de dimension 2, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et $e_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_3)$ est une base de E, puis écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Remarque 1.1.4. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est en réalité la matrice de l'identité relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Théorème : Inversibilité de la matrice de passage

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases du même espace vectoriel E de dimension finie. Alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est inversible, et son inverse est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$:

$$\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

Démonstration. À compléter. □

1.2. Formules de changement de base.

Théorème : Formules de changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, u un vecteur de E et f un endomorphisme de E. On note :

- P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$,
- X le vecteur-colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et X' le vecteur-colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$,
- A la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$: $A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B})$, et A' la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$: $A' = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}')$

Alors :

$$X = PX' \qquad \text{et} \qquad A' = P^{-1}AP$$

Remarque 1.2.1. Attention : la matrice P permet effectivement d'exprimer les **anciennes** coordonnées en fonction des **nouvelles**. Si on veut l'expression contraire, on utilise la matrice P^{-1} : $X' = P^{-1}X$.

La deuxième relation peut aussi s'écrire :

$$\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}') = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B})P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B})P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Démonstration. À compléter. □

Exercice 1.2.2. Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x; y; z) = (x + y; 2x; z - y)$.

1. Établir que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et écrire sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$ donnée dans l'exercice 1.1.2. Quelle relation a-t-on entre A et A' ?

3. On note $u = (1; 2; 3)$. Quelles sont les coordonnées de u et $f(u)$ dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$?

Exercice 1.2.3. Avec les notations de l'exercice 1.1.3, on considère l'endomorphisme f défini par $f(e_1) = -e_1$ et $f(e_2) = 2e_1 + e_2$.

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. Donner la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide des matrices de passage.

3. Calculer $f(e_1)$ et $f(e_3)$ et exprimer les résultats en fonction de e_1 et e_3. Vérifier le résultat précédent.

1.3. Matrices semblables.

Définition : Matrices semblables

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices A et B sont dites **semblables** si, et seulement s'il existe une matrice **inversible** P telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque 1.3.1. Si A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$ i.e. $A = PBP^{-1}$ donc on peut aussi écrire A sous la forme $Q^{-1}BQ$ avec la matrice inversible $Q = P^{-1}$.

Proposition : Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme

Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles sont les matrices d'un même endomorphisme relativement à deux bases éventuellement différentes.

Démonstration. À compléter. □

Proposition : Puissances de deux matrices semblables (à redémontrer systématiquement en exercices)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice **inversible** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PBP^{-1}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PB^kP^{-1}.$$

Démonstration. À compléter. □

2. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée.

Étant donné un endomorphisme de E et sa matrice dans une base donnée, on va donc chercher à trouver une matrice D semblable à A la plus "agréable" possible, par exemple diagonale, pour effectuer certains calculs, donc chercher une nouvelle base de E qui permette d'écrire cette matrice D. Comment faire pour trouver cette "nouvelle" base qui permette d'avoir une matrice diagonale ? Est-ce toujours possible ?

2.1. Définitions et premières propriétés.

Définition : Valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée de taille n.

- Soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On dit que X est un **vecteur propre** de la matrice A si et seulement si
  1. X est non nul et
  2. il existe un réel λ tel que $AX = \lambda X$.
- Soit λ un nombre réel. On dit que λ est une **valeur propre** de la matrice A si et seulement si il existe un vecteur non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$. X est alors appelé **vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.**
- L'ensemble des valeurs propres de la matrice A est appelé **spectre** de A et noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Remarque 2.1.1. On déduit de la définition que **le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre.**

Ceci est lié au fait que : $A0_E = 0_E = 20_E = -30_E$ etc, donc on ne peut pas définir la valeur propre associée correctement.

Proposition : Sous-espace propre d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée de taille n et λ un nombre réel. L'ensemble :

$$E_\lambda(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\right\}$$

des vecteurs X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le produit (à gauche) par A est égal à λX est appelé **sous-espace propre** associé à λ.

$E_\lambda(A)$ contient le vecteur nul $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et les vecteurs propres de A associés à λ (s'ils existent).

Le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. À compléter. □

On peut alors exprimer différemment le fait que λ soit une valeur propre de A :

Proposition : Conditions nécessaires et suffisantes pour être une valeur propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) le réel λ est une valeur propre de A

ii) le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ n'est pas réduit au vecteur nul

iii) $\dim\big(E_\lambda(f)\big) \geqslant 1$

iv) l'endomorphisme $A - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas injectif

v) l'endomorphisme $A - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas bijectif

vi) l'endomorphisme $A - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas surjectif

Remarque 2.1.2.

- Si λ n'est pas valeur propre de A, alors $E_\lambda(A)$ est réduit au vecteur nul.
- Si λ est une valeur propre de A, alors $E_\lambda(A)$ contient le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et les vecteurs propres associés à λ, et $\dim\big(E_\lambda(A)\big) \geqslant 1$. Cela signifie que le système linéaire $(A - \lambda I_n)X = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ n'est pas un système de Cramer, donc que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Exercice 2.1.3. Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et f l'endomorphisme de E définie par $f(e_1) = e_2 - e_1$ et $f(e_2) = 2e_2$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. Montrer que $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre μ associée à $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$?

3. Montrer que $\lambda = -1$ est valeur propre de A. Donner un vecteur propre associé qu'on notera X. Préciser l'espace propre associé à λ.

4. Déterminer $E_\mu(A)$, l'espace propre de A associé à μ.

5. Montrer que $\left(X, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de E que l'on notera $\mathcal{B}'$. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Préciser son inverse.

6. Écrire la matrice D de A dans la base $\mathcal{B}'$.

7. Quelle relation y a-t-il entre A, D, P et P^{-1} ?

Proposition : Lien entre valeur propre d'une matrice carrée et inversibilité

Soit A une matrice carrée de taille n et λ un réel.

λ est une valeur propre de A si, et seulement si, la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

En particulier : 0 est valeur propre de A si, et seulement si, la matrice A n'est pas inversible.

Bien sûr, le même résultat s'applique aussi pour les endomorphismes.

Remarque 2.1.4. Chercher les valeurs propres d'une matrice revient donc à chercher les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Dans le cas où la matrice est triangulaire, le critère de non-inversibilité est plus simple à établir :

Proposition : Valeurs propres d'une matrice triangulaire

Soit T une matrice carrée triangulaire de taille n. Les valeurs propres de T sont les éléments diagonaux de T.

$$\text{Si } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ alors } \mathrm{Sp}(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

Démonstration. À compléter. □

Exemple 2.1.5.

- Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sont 3, -2 et 4.
- Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont 0, 1 et 2.
- I_n n'a qu'une seule valeur propre : 1.

2.2. **Méthodes.** Dans toute cette section, on note A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Méthode : Montrer qu'un vecteur donné est un vecteur propre

Comment montrer qu'un vecteur X donné est vecteur propre de la matrice A ?
(directement) On justifie que X est non nul (c'est souvent facilement visible) puis on calcule Le produit AX de A par X et on cherche à savoir si AX est colinéaire à X.

Méthode : Montrer qu'un réel donné est une valeur propre

Comment montrer qu'un réel λ donné est valeur propre de la matrice A ?

- On résout le système $AX = \lambda X$. Le réel λ sera valeur propre si et seulement si l'ensemble des solutions du système n'est pas réduit au vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Pour résoudre ce système, il vaut mieux le transformer en un système homogène.
- On montre que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Exercice 2.2.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le réel 1 est-il valeur propre de A ? Si oui, déterminer le sous-espace propre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ associé.
Même question pour le réel -2.

Méthode : Recherche des valeurs propres et vecteurs propres

1. Première étape : on cherche les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

- Si la matrice est triangulaire (ou diagonale), ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
- Si la matrice est de taille 2, notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on construit la matrice :
$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}.$$
Alors $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible si, et seulement si, l'équation du second degré :
$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$
qui équivaut à l'équation
$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0.$$
Les solutions de l'une ou l'autre de ces équations sont les valeurs propres.
- Sinon, on effectue des opérations élémentaires sur $A - \lambda I_n$ visant à obtenir une matrice triangulaire. Cette matrice ne sera pas inversible si, et seulement si, l'un de ses coefficients diagonaux est nul, ce qui donne une ou plusieurs équations à résoudre, d'inconnue λ. On cherche alors les valeurs de λ correspondantes : ce sont les valeurs propres de la matrice A.
Parfois, plusieurs cas seront à traiter séparément en fonction de certaines valeurs de λ donnant lieu à des opérations "interdites" (remplacement d'une ligne par zéro fois elle-même, division par une expression dépendant de λ et qui peut s'annuler, etc).

À la fin de cette première étape, on connaît les valeurs propres de la matrice A. On va maintenant chercher les espaces propres associés.

2. Deuxième étape : pour chacune des valeurs propres trouvées lors de la première étape, on résout le système $(A - \lambda I_n)X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.2.2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.2.3. On considère l'application f définie par $f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Quelle est la matrice A de f dans les bases canoniques ?

3. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.

Exercice 2.2.4. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on définit l'application $(f(P))(x) = xP(x+1) - (x+1)P(x)$ pour tout P appartenant à E.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de E.

3. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? L'endomorphisme f est-il un automorphisme de E ?

4. Déterminer les espaces propres de A.

5. Préciser le noyau et l'image de f.

3. Diagonalisation

Définition : Matrice diagonalisable

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **diagonalisable** si, et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

Proposition : Lien entre matrice diagonalisable et matrices semblables

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est diagonalisable si, et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale : il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

Les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A, et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers une base constituée de vecteurs propres de A.

Démonstration. À compléter. □

Exercice 3.0.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Pourquoi peut-on affirmer que 0 est valeur propre de cette matrice ?

2. Rechercher les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

4. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Déterminer P.

4. Calcul des puissances d'une matrice carrée

Proposition : Puissances d'une matrice diagonale

Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. Alors, pour tout entier naturel k,

$$D^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_n)^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On procède par récurrence, c'est immédiat. □

Remarque 4.0.1.

- Cette propriété illustre l'importance des matrices diagonales pour le calcul des puissances.
- Attention : cette propriété ne fonctionne que si la matrice est diagonale. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 1^2 \\ 0^2 & 1^2 \end{pmatrix}$.
- Pour une matrice T triangulaire (supérieure ou inférieure), les coefficients diagonaux de T^k sont obtenus en élevant les coefficients diagonaux de T à la puissance k. Mais pour les autres coefficients, il n'y a pas de règle simple.

Théorème : Formule du binôme de Newton

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **qui commutent** (c'est-à-dire telles que $AB = BA$) et k un entier naturel. On a :

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}.$$

Remarque 4.0.2. Lorsque l'on utilise cette formule, on essaye toujours de placer la matrice la plus simple en deuxième position, puisqu'on ses puissances sont plus faciles à calculer.

Démonstration. À compléter. □

Exercice type concours.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2I + J$.

2. Calculer J^2 et J^3, en déduire J^n pour tout entier naturel n.

3. Calculer A^7.

Méthode : Puissances d'une matrice carrée

Le problème du calcul des puissances d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est souvent délicat, lorsque cette matrice n'est pas diagonale ou diagonalisable). Dans certains cas particuliers, on peut tout de même y répondre.

- **Récurrence :** On calcule les premières puissances A^2, A^3, A^4 et on conjecture une formule que l'on démontre par récurrence.
- **Suites récurrentes couplées :** On exprime A^2 en fonction de A et I_n : $A^2 = \lambda A + \mu I_n$ (avec λ et μ réels) puis on montre par récurrence l'existence de réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n I$ en exprimant u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n. On détermine les expressions de u_n et v_n en fonction de n pour conclure.

  Parfois c'est A^3 qui s'exprime en fonction de I_n, A et A^2, et on a donc 3 suites à expliciter par leur relations de récurrence. Parfois c'est encore plus compliqué.
- **Binôme :** On décompose la matrice A sous la forme $B + C$ avec $BC = CB$ et les puissances de B et C faciles à calculer. On applique alors la formule du binôme matriciel : $A^k = (B+C)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B^i C^{k-i}$. Souvent, on utilise une décomposition $A = J + D$ avec D diagonale et J vérifiant $J^p = 0$ pour un certain entier p. La somme précédente se réduit alors aux termes $i \in \{0, \cdots, p\}$.

  De telles matrices J et D existent toujours (pour toute matrice A) mais la méthode générale pour les trouver est hors programme. Dans un cas comme celui-ci, l'exercice nous guidera pour trouver J et D, avant de nous demander de calculer les puissances de A.
- **Diagonalisation :** On trouve une matrice D diagonale et une matrice P inversibles telles que $A = PDP^{-1}$, puis on prouve par récurrence que $A^k = PD^kP^{-1}$ (proposition 1.3) avant de conclure.

Exercice 4.0.3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 et J^3 et exprimer le résultat en fonction de J.
Conjecturer une expression pour J^n en fonction de J.

2. Montrer la conjecture précédente par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Le résultat est-il encore valable pour $n = 0$?

Exercice type concours.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer puis exprimer A^2 en fonction de A et I.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels u_n et v_n tels que $A^n = u_nA + v_nI$.

3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire double.

4. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

5. Donner l'expression matricielle de A^n.

Exercice type concours.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux matrices J et D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = J + D$ avec D diagonale et J possédant des coefficients diagonaux nuls.

2. Calculer J^2, J^3. En déduire J^n pour tout entier $n \geqslant 3$.

3. En déduire A^n pour tout n entier naturel.

Exercice type concours.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.

2. **a.** Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

b. Déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

c. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice type concours.

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M) = M + (a+d)I$ où I désigne la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique.

2. Justifier que A est diagonalisable.

3. Montrer que la famille $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Écrire la matrice D de f dans cette base. En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, vérifiant de plus que P n'a que des 1 sur sa diagonale et seulement des 0 et des 1 sur sa premier ligne.

5. Déterminer P^{-1} puis A^n.

5. Vecteurs propres et diagonalisation

5.1. **Valeurs propres distinctes.**

Théorème : Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres **distinctes** de A. Si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, alors la famille de vecteurs $((X_1, X_2, \ldots, X_p)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. À compléter. □

Corollaire : Valeurs propres distinctes (hors programme)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- La matrice A admet au plus n valeurs propres distinctes,
- Si elle admet exactement n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 5.1.1. Attention, le deuxième critère est une condition suffisante, mais non nécessaire. Par exemple, $A = \mathrm{I}_n$ est diagonalisable mais possède une seule valeur propre : 1.

Exercice 5.1.2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable.

On peut généraliser le théorème 5.1, en construisant non pas une famille libre avec un vecteur propre de chaque valeur propre mais en construisant une famille libre en réunissant les bases de chaque espaces propres.

Théorème : Concaténation des bases des sous-espaces propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives des sous-espaces propres $E_1, E_2, \ldots, E_p$. Alors la famille de vecteurs obtenue par juxtaposition des familles $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p$ est libre.

5.2. **Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation (hors programme ?)**

On arrive maintenant au point culminant de ce chapitre : nous sommes en mesure de décider si n'importe quelle matrice est diagonalisable ou non

Théorème : Somme des dimensions des sous-espace propres (hors programme)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rappelons que : $\mathrm{Sp}(A)$ (le spectre de A) désigne l'ensemble des valeurs propres de A.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

- La matrice A est diagonalisable
- $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = n.$

Démonstration. À compléter. □

Exercice 5.2.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

Remarque 5.2.2. On a bien une condition **nécessaire** et **suffisante**. Si elle est remplie, on obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A en juxtaposant les bases des différents espaces propres, ce qui permet d'obtenir une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$.

P est alors la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres.

Attention : la matrice D n'est pas unique, elle dépend de l'ordre choisi pour les valeurs propres. D étant choisie, P non plus n'est pas unique et dépend des vecteurs propres choisis.

Exercice 5.2.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -12 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 5.2.4. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et J ne sont pas diagonalisables.

5.3. Polynôme annulateur d'une matrice.

Définition : Puissances et polynôme d'un endomorphisme

Soit $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_px^p$ un polynôme. Alors $P(A)$ désigne l'endomorphisme suivant

$$P(A) = a_0\mathrm{I}_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_pA^p.$$

On dit que P est un **polynôme annulateur** de A si, et seulement si $P(A)$ est la matrice nulle.

Exercice 5.3.1. Soit $f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (-x + y, x + y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.

3. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.

Théorème : Lien entre valeur propre d'un endomorphisme et racine d'un polynôme annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme annulateur de A. Si λ est une valeur propre de A, alors λ est une racine de P (i.e. $P(\lambda) = 0$).

Remarque 5.3.2. Attention : la réciproque est fausse. Les racines d'un polynôme annulateur de A ne sont pas forcément des valeurs propres de A.

Démonstration. [À savoir refaire sur n'importe quel exemple] Si A est une matrice telle que le polynôme $X^2 - 3X + 2$ soit annulateur de A, que peut-on dire ? (Justifier.)

Soit λ une valeur propre de A. Alors il existe un vecteur propre $X \neq 0_E$ tel que $AX = \lambda X$ donc $A^2X = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$.

Par hypothèse, $A^2 - 3A + 2$
mathrmI$_n$ est la matrice nulle. En particulier

$$(A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_n)X = 0$$

et donc

$$A^2X - 3AX + 2X = 0_E$$

est équivalent à

$$\lambda^2 X - 3\lambda X + 2X = 0$$

ou encore

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)X = 0$$

Or, puisque X n'est pas nul, on obtient

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Donc λ est une racine du polynôme $x^2 - 3x + 2$. On a

$$\Delta = 1, \quad \lambda_1 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = 2.$$

Ainsi, les seules valeurs propres possibles de f sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. □

Méthode : Valeurs propres et racines d'un polynôme annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme annulateur de A. Alors les valeurs propres de A **sont à rechercher parmi** les racines de P :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Rac}(P)}$$

Autrement dit, les racines de P sont des **candidats valeurs propres**, ou des **valeurs propres possibles**, de A.

Exercice 5.3.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une polynôme annulateur de degré 2 de A. En déduire les valeurs propres de A.

Exercice 5.3.4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre A et A^2.

2. Montrer que A est diagonalisable.

3. Trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice type concours.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $f(1,1,1)$. Que peut-on en déduire ?

2. Calculer $A^2 - 2A$. En déduire un polynôme annulateur de A.

3. Montrer que les valeurs propres possibles de A sont -2 et 4.

4. Déterminer les sous-espaces propres de A.

5. A est-elle diagonalisable ? f est-il bijectif ?

5.4. Matrices symétriques.

Définition : Matrice symétrique

Soit A une matrice de taille n. On dit que A est symétrique si, et seulement si, la transposée de A est égale à A : ${}^tA = A$.

Théorème : Matrice symétrique et diagonalisation

Toute matrice symétrique est diagonalisable.

Démonstration. Admis. C'est en fait un théorème d'analyse ! □

Exercice 5.4.1. Montrer sans calcul que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

5.5. **Diagonaliser avec l'aide de Python.** Pour une matrice de taille plus grande que 2, il n'est pas possible en général de trouver ses valeurs propres sans indication. La question semble avoir d'ailleurs disparu des sujets de concours. En revanche, une démarche classique des concepteurs de concours consiste à faire deviner certains éléments qui aident à la diagonalisation en montrant les retours d'un programme en Python. Il est beaucoup plus facile en effet de **vérifier** qu'un nombre est valeur propre, plutôt que de trouver les valeurs propres.

Il existe (au moins) deux possibilités pour faire jouer un rôle à Python dans la réduction d'une matrice A :

1. Soit suggérer un polynôme annulateur de A.

2. Soit nous donner le rang ou le noyau de $A - \lambda \mathrm{I}_n$ pour certaines valeurs de λ.

La bonne réaction du candidat est alors de **conjecturer** (un polynôme annulateur ou quelques valeurs propres pour A) puis de **vérifier** ses conjectures par le calcul. En effet, un programme Python ne fait que des calculs approchés et il n'est pas possible de conclure directement à partir des retours d'un programme.

Exemple 5.5.1. Inspiré d'**EDHEC 2022** Exercice 1.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. On considère le programme Python suivant.

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

A = np.array([[0,-1,1,0],[-1,0,0,1],[1,0,0,-1],[0,1,-1,0]])

B = alg.matrix_power(A,3)-4*A

print("A**3-4A=",B)
```

L'exécution de ce programme retourne

```
A**3-4A =
[[0 0 0 0]
 [0 0 0 0]
 [0 0 0 0]
 [0 0 0 0]]
```

.

Trouver un polynôme annulateur de A.

3. Quelles sont les valeurs propres possibles de A.

4. Quel est le noyau de A. En déduire que 0 est valeur propre de A.

5. On considère le programme Python suivant.

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

A=np.array([[0,-1,1,0],[-1,0,0,1],[1,0,0,-1],[0,1,-1,0]])

r1 = alg.matrix_rank(A-2*np.eye(4))
r2 = alg.matrix_rank(A+2*np.eye(4))

print("r1 = ",r1)
print("r2 = ",r2)
```

L'exécution de ce programme retourne

```
r1 = 3
r2 = 3
```

.

Que peut-on conjecturer sur les valeurs propres non nulles de A et sur la dimension des espaces propres associés.

6. Vérifier vos conjectures et diagonaliser A.

6. Conclusion : que signifie diagonaliser un endomorphisme ?

Dans tout ce qui précède, nous avons cherché à diagonaliser *une matrice* A, c'est-à-dire que nous avons cherché des conditions qui assurent l'existence d'une matrice semblable à A et diagonale.

Que faudrait-il intégrer à notre théorie pour pouvoir parler de la diagonalisation *d'un endomorphisme* f ? On pourrait tout d'abord se donner une base d'espace vectoriel (par exemple la base canonique) sur lequel f est défini, puis construire la matrice A de f dans cette base, et enfin nous ramener à la diagonalisation de la matrice A.

Vérifions que cette approche est raisonnable. Le problème que ce raisonnement pose, c'est que la matrice A dépend du choix de la base qui a permis de la construire alors que f n'en dépend pas. Pour que f soit diagonalisable en tant qu'endomorphisme, il faudrait que *toutes* les matrices de f (pour tous les choix possibles de bases) soient diagonalisables.

Nous allons brièvement justifier dans ces quelques lignes que si *une* matrice de f est diagonalisable, alors elles le sont *toutes*, rendant ainsi valable, le raisonnement qui consiste à sélectionner arbitrairement une matrice de f. Supposons donc que A (la matrice de f dans une base choisie au hasard) est diagonalisable et choisissons une matrice A' de f construite à l'aide d'une autre base. La formule de changement de base s'applique entre A et A' : il existe une matrice inversible P (la matrice de passage de la base qui sert à fabriquer A à la base qui sert à fabriquer A') telle que

$$A = PA'P^{-1}.$$

D'autre part, on a supposé que A est diagonalisable : il existe donc une matrice Q et une matrice diagonale D telles que

$$D = Q^{-1}AP.$$

Nous allons enfin vérifier qu'*une matrice semblable à une matrice semblable à D est semblable à D*. En effet

$$D = Q^{-1}AP = Q^{-1}\left(PA'P^{-1}\right)Q = \left(P^{-1}Q\right)^{-1}A'\left(P^{-1}Q\right)$$

La matrice $\left(P^{-1}Q\right)$ est une matrice inversible comme produit de deux matrices inversibles et la relation précédente est une relation de similitude avec la matrice de passage $\left(P^{-1}Q\right)$. Ceci montre que A' est semblable à une matrice diagonale, elle est donc diagonalisable elle-aussi !

7. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Remarque 7.0.1. **1.** Nous traiterons certains des sujets suivants en exercices, en travaux dirigés, en colles ou en devoir. Pour les autres, il existe des corrigés que l'on trouve facilement sur

Internet. Ces corrigés sont parfois très rapides, n'hésitez pas à venir m'en parler si vous pensez qu'une question mérite des explications supplémentaires.

2. Les sujets de concours sont souvent pensés pour faire appel à plusieurs parties du programme. Dans la liste qui suit figurent les exercices pour lequel il est *nécessaire* de connaître les résultats de ce chapitre. Mais parfois *ce n'est pas suffisant* car d'autres parties du cours sont aussi impliquées. J'indique ces situations avec le symbole *.

3. Cette liste n'est pas exhaustive. En effet, presque tous les exercices d'algèbre dans les concours font principalement appel à ce chapitre : on demande quasi-systématiquent de calculer des valeurs propres, des vecteurs propres et de savoir décider si un endomorphisme est diagonalisable ; puis ensuite de calculer ses puissances et son commutant.

4. Nous verrons que le programme d'algèbre trouve parfois quelques applications dans les exercices de probabilités, ou pour exprimer le terme général d'une suite récurrente linéaire. La liste qui suit ne tient pas compte de ces applications sauf lorsque l'algèbre linéaire joue un rôle important dans la construction de l'exercice.

1. ECRICOME

- 1988 Exercice 1.
- 1990 Exercice 1.
- 1991 Exercice 1.
- 1992 Exercice 2 (avec applications en probas *).
- 1993 Exercice 2 (avec applications en probas *).
- 1995 Problème.
- 1996 Problème.
- 1997 Exercice 2.
- 1998 Exercice 2.
- 1999 Exercice 2.
- 2000 Exercice 2.
- 2001 Exercice 1 (avec quelques questions de probas).
- 2002 Exercice 1.
- 2003 Exercice 1.
- 2004 Exercice 2.
- 2006 Exercice 3 (avec probas).
- 2007 Exercice 2.
- 2009 Exercice 1.
- 2010 Exercice 1.
- 2011 Exercice 1.
- 2012 Exercice 1 * (on étudie une suite de matrices, il y a donc de l'analyse dans cet exercice).
- 2013 Exercice 1.
- 2014 Exercice 1.
- 2015 Exercice 2.
- 2016 Exercice 1.
- 2017 Exercice 1 * (avec analyse).
- 2018 Exercice 1.
- 2019 Exercice 1.

- 2020 Exercice 1.
- 2021 Exercice 1.
- 2022 Exercice 1.
- 2023 (sujet 0) Exercice 1.

2. EDHEC

- 1997 Exercice 3.
- 1999 Exercice 1.
- 2000 Exercice 2.
- 2002 Problème.
- 2004 Exercice 2.
- 2005 Exercice 1.
- 2006 Exercice 1.
- 2007 Exercice 1.
- 2008 Exercice 2.
- 2009 Problème.
- 2010 Problème (avec questions de probas).
- 2011 Exercice 2.
- 2012 Exercice 2.
- 2013 Exercice 2.
- 2014 Exercice 1.
- 2015 Exercice 1.
- 2016 Exercice 1.
- 2017 Exercice 2 et un peu dans le problème.
- 2018 Exercice 1.
- 2019 Exercice 1.
- 2020 Exercice 1.
- 2021 Exercice 3.
- 2022 Exercice 1.

3. EML

- 2000 Exercice 1.
- 2001 Exercice 1.
- 2003 Exercice 1 *.
- 2004 Exercice 2.
- 2005 Exercice 1.
- 2006 Exercice 1.
- 2007 Exercice 1.
- 2008 Exercice 2.
- 2009 Exercice 2.
- 2010 Exercice 1.
- 2011 Exercice 2.
- 2012 Exercice 1.

- 2013 Exercice 2.
- 2014 Exercice 2.
- 2015 Exercice 3.
- 2016 Exercice 1.
- 2017 Exercice 2.
- 2018 Exercice 1.
- 2019 Exercice 2.
- 2020 Exercice 1.
- 2021 Problème 2 *.
- 2022 Exercice 2.

4. ESCP

- 1982 épreuve I Exercice 2.
- 1986 épreuve III Exercice 1.
- 1990 épreuve III Exercice 1.
- 1991 épreuve III Exercice 1 *.
- 1992 épreuve III Exercice 1 *.
- 1993 épreuve III Exercice 1.
- 1994 épreuve III Exercice 2.
- 1996 épreuve III Exercice 1.
- 1997 épreuve III Exercice 1 et 2 *.
- 2000 épreuve III Exercice 1 et 2 *.
- 2001 épreuve III Exercice 1.
- 2002 épreuve III Exercice *.
- 2003 épreuve III Exercice *.
- 2004 épreuve III Exercice *.
- 2005 épreuve III Exercice.

5. ESC

- 2004 Exercice 1.
- 2005 Exercice 1.
- 2006 Exercice 1 *.
- 2007 Exercice 1.
- 2008 Exercice 1.
- 2009 Exercice 1 et 2 *.

6. ESSEC

- 1991 épreuve II Partie I.
- 1995 épreuve I Exercice 1.
- 1996 épreuve III Problème 2.
- 1998 épreuve III Partie I.
- 1999 épreuve III Exercice 2 *.
- 2000 épreuve II * (beaucoup d'autres choses dans ce problème).
- 2001 épreuve III Exercice 2 *.

- 2002 épreuve III Exercice 1 *.
- 2003 épreuve III Exercice 1 *.
- 2004 épreuve III Exercice 1 *.
- 2008 épreve II * (l'algèbre linéaire est ici plutôt marginale).
- 2011 épreuve I Problème 1 *.
- 2015 épreuve I Partie III *.
- 2016 épreuve II Partie II *.
- 2024 épreuve II.

7. HEC

- 2009 Exercice 1.
- 2010 Exercice.
- 2011 Exercice.
- 2012 Exercice.
- 2013 Exercice.
- 2016 Exercice.
- 2017 Exercice.
- 2018 Exercice.
- 2019 Exercice.
- Plusieurs questions d'algèbre linéaire et de réduction disséminées dans les problèmes.